

## Обратная задача метода естественного поля

М.С. Маловичко<sup>1,2</sup>, К.В. Титов<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Сколковский институт науки и технологий, [m.malovichko@skoltech.ru](mailto:m.malovichko@skoltech.ru)

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт

<sup>3</sup>С.-Петербургский государственный университет, [k.titov@spbu.ru](mailto:k.titov@spbu.ru)

---

### АННОТАЦИЯ

В работе предлагается новый численный метод решения обратной задачи метода естественного поля. Метод существенно отличается от стандартной минимизации по Тихонову и основан на преобразовании обратной задачи к вариационной задаче с седловой точкой. Для численного решения вариационная задача аппроксимируется в конечно-элементных пространствах и сводится к алгебраической задаче специального вида. В отличие от стандартной минимизации функционала Тихонова, в предлагаемом подходе матрица результирующей линейной системы является разреженной, а её блоки являются дискретными версиями эллиптических дифференциальных операторов. Это позволяет применять эффективные прямые методы решения линейных систем с разреженными матрицами, а также итерационные методы. Для задач большого размера предлагаемый подход быстрее и требует меньше памяти, чем стандартная минимизация по Тихонову, основанная на решении нормальной системы. В работе приведена вариационная постановка задачи и её дискретная формулировка. Приводятся результаты численного эксперимента по решению обратной задачи естественного поля на тетраэдральной сетке с использованием линейных узловых конечных элементов.

**Ключевые слова:** обратная задача, метод естественного поля.

---

### ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена вычислительным аспектам инверсии естественного поля (ЕП). Такие задачи возникают, например, при интерпретации площадной съёмки ЕП с целью изучения потоков подземных вод, при геологическом картировании и поисках рудных месторождений. Механизм возникновения электрического потенциала при фильтрации воды сквозь горные породы и грунты описан в работах (Revil and Jardani 2013, Bernabé and Maïneult 2015, Guarracino and Jougnot 2018). Природа ЕП, связанного с электронными проводниками (сульфидами, графитом и т.д.) рассмотрены в работах (Sato and Mooney 1960, Семёнов 1980, Комаров 1994).

Математически, обратная задача метода ЕП есть задача восстановления правой части уравнения Пуассона. Решению этой задачи посвящена обширная литература в различных областях. В геофизике эта задача возникает при инверсии данных ЕП, магниторазведки без учёта размагничивания и гравиразведки.

В геофизических приложениях обратные задачи такого типа почти всегда решают в форме минимизации функционала Тихонова. Применительно к обратной задаче ЕП в

гидрогеологии такой подход использован в работах (Minsley et al. 2007, Jardani et al. 2008, Volève et al. 2009). Этот способ даёт хорошие результаты, но обладает несколькими недостатками. На наш взгляд, наиболее серьёзным из них является необходимость решать нормальную систему алгебраических уравнений (СЛАУ). Матрица этой системы симметричная, плотная и очень плохо обусловлена. Для задач малого и среднего размера эта СЛАУ может быть решена прямым методом, но расход памяти и число операций растёт от числа неизвестных  $n$  как  $O(n^2)$  и  $O(n^3)$ , соответственно. Для достаточно больших задач время становится недопустимо велико, а матрица может не помещаться в память. В этом случае СЛАУ может быть решена только итерационно, например, методом сопряжённых градиентов (СГ). При этом итерационный метод сходится очень медленно. Каждая итерация СГ требует двух решений прямой задачи, и для больших обратных задач требуется тысячи решений прямой задачи.

В настоящей работе предложен подход к обратной задаче ЕП на основе техники оптимального управления. Этот подход ранее не применялся для решения обратных линейных задач геофизики, хотя похожий метод был успешно использован в медицине

(Malovichko et al. 2021). Задача реконструкции правой части формулируется в виде задачи оптимизации с ограничениями. Выписывая систему Эйлера-Лагранжа, мы приходим к вариационной задаче с седловой точкой, которая затем дискретизируется в подходящих конечно-элементных (КЭ) пространствах. Результирующая алгебраическая задача приводит к точно такой же реконструкции правой части, что и нормальная система. Возникающая матрица симметрична и имеет размер в 3 раза больший по сравнению с нормальной системой уравнений, но при этом она разрежена, а её блоки есть конечномерные аппроксимации дифференциальных операторов. Таким образом, эта СЛАУ может быть эффективно решена как прямым методом (например, на основе разреженного разложения Холецкого), так и предобусловленным итерационным методом. Для задач большого размера (сотни тысяч и миллионы неизвестных) этот подход будет более экономичным по памяти и более быстрым.

### Постановка задачи

Рассмотрим расчётную область  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  с границей  $\partial\Omega$ , заполненную веществом с электропроводностью  $\sigma(x, y, z)$ . Электрический потенциал  $u$  удовлетворяет уравнению Пуассона,

$$-div(\sigma \nabla u) = f \text{ в } \Omega, \quad (1.1)$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_N, \quad (1.3)$$

где  $\Gamma_N$  есть дневная поверхность,  $\Gamma_D$  есть остаток границы, т.е.  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ ,  $\nu$  – это внешняя нормаль к границе. Правая часть  $f$  задаётся сторонними токами плотностью  $I$ , так, что  $f = div I$ . Сторонние токи появляются в результате фильтрации воды в пористой среде, электрохимических реакций, диффузии солей и теплопереноса под действием внешних сил: градиентов давления, температуры и химического потенциала (Onsager, 1931; Bernabé and Mainault 2015, Guarracino and Jougnot 2018).

Стандартно, обратная задача восстановления источника формулируется в виде минимизации функционала Тихонова. Для упрощения сформулируем её в дискретном виде:

$$\min_f \frac{1}{2} \|W(J\tilde{f} - d)\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|L^{1/2}\tilde{f}\|_2^2, \quad (2)$$

где  $d$  – измеренные значения потенциала в  $k$  точках,  $W$  – матрица весов данных (обычно диагональная),  $J$  – матрица Якоби,  $L$  – матрица стабилизатора, определяющий ограничения, накладываемые на модель. Здесь и далее тильда  $\tilde{\cdot}$  обозначает дискретную версию

переменной, в частности, если используется МКЭ, то  $\tilde{f}$  есть вектор коэффициентов разложения  $f$  по базисным функциям. Решение задачи (2) удовлетворяет следующей нормальной системе уравнений,

$$(J^T W^2 J + \varepsilon L)\tilde{f} = J^T W^2 d. \quad (3)$$

Матрица системы (3) плотная, симметричная, плохо обусловленная.

В литературе предложено огромное число вариантов этой постановки, например, использующие нормы отличные от  $\ell_2$ , различные виды матрицы  $L$ , итерационное обновление весов  $W$ , и т.д. Но, так или иначе, они сводятся к формулировке (3), в которой ключевую роль играет Якобиан  $J$ .

Сформулируем задачу восстановления источника в виде задачи оптимизации с ограничениями,

$$\min_{f, u} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} w_i^2 (Q_i(u) - d_i)^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\mathcal{F} \nabla f|^2 dV, \quad (4.1)$$

при условии

$$-div(\sigma \nabla u) - f = 0 \text{ в } \Omega, \quad (4.2)$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_N. \quad (4.3)$$

Здесь  $\mathcal{F}$  – весовая функция, которая компенсирует убывание чувствительность данных к правой части с глубиной,  $w_i$  – веса данных (элементы матрицы  $W$ ). Операторы  $Q_i(\cdot)$  возвращают значение потенциала на  $i$ -й точке по заданному распределению потенциала  $u$ . Они могут быть формально определены как свёртка с дельта-функцией:

$$Q_i(u) = \int_{\Omega} u(r) \delta(r - r_i) dV, \quad (5)$$

где  $r_i$  – это позиция  $i$ -го электрода.

Можно показать, что оптимальное решение задачи (4) удовлетворяет следующей вариационной задаче.

Найти тройку функций

$$(f, \lambda, u) \in V \times V \times V$$

такую, что:

$$\mathbb{A}(f, \varphi) - \mathbb{B}^t(\lambda, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in V, \quad (6.1)$$

$$-\mathbb{B}(f, \mu) + \mathbb{E}^t(u, \mu) = 0, \quad \forall \mu \in V, \quad (6.2)$$

$$\mathbb{E}(\lambda, v) + \mathbb{F}(u, v) = \mathbb{S}(v), \quad \forall v \in V. \quad (6.3)$$

Билинейный формы определены следующим образом:

$$\mathbb{A}(f, \varphi) = \varepsilon \int_{\Omega} \mathcal{F} \nabla f \cdot \mathcal{F} \nabla \varphi dV, \quad (7.1)$$

$$\mathbb{B}(f, \mu) = \int_{\Omega} f \mu dV, \quad (7.2)$$

$$\mathbb{E}(\lambda, v) = \int_{\Omega} \sigma \nabla \lambda \cdot \nabla v dV, \quad (7.3)$$

$$\mathbb{F}(u, v) = \sum_{i=0}^{k-1} w_i^2 Q_i(v) Q_i(u). \quad (7.4)$$

Линейная форма  $\mathbb{S}$  имеет следующее представление:

$$\mathbb{S}(v) = \sum_{i=0}^{k-1} w_i^2 Q_i(v) d_i. \quad (7.5)$$

Наконец, функциональное пространство  $V$  есть объединение функций из  $H_1(\Omega)$  с нулевым граничным значением на  $\Gamma_D$ :

$$V = \{v \in H_1(\Omega) : v = 0 \text{ на } \Gamma_D\}. \quad (8)$$

### Конечномерная аппроксимация

Дискретизируем задачу (6) на тетраэдральной сетке с линейными узловыми базисными функциями и получим СЛАУ

$$\mathcal{A}\xi = b, \quad (9.1)$$

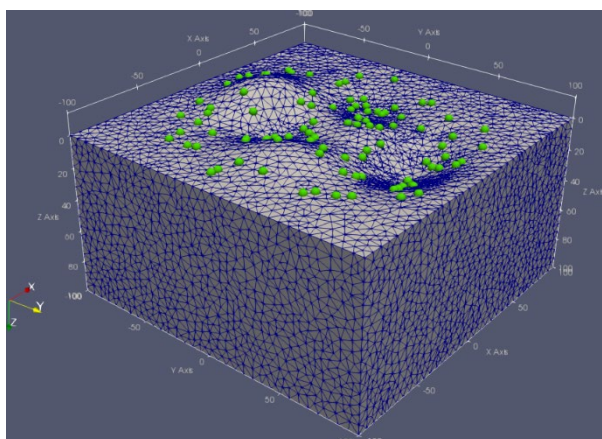
где

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & -B^T & O \\ -B & O & E^T \\ O & E & F \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{\lambda} \\ \tilde{u} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix}. \quad (9.2)$$

Здесь  $O$  – это нулевой блок, остальные блоки матрицы  $\mathcal{A}$  есть конечномерные аппроксимации билинейных форм (7), а вектор  $s$  соответствует линейной форме  $S$ .

Матрица  $\mathcal{A}$  симметричная знакопеременная. Её размер в три раза больше матрицы нормальной системы (3), но, поскольку она разрежена, то для больших задач решение СЛАУ (9) оказывается экономичнее решения системы (3).

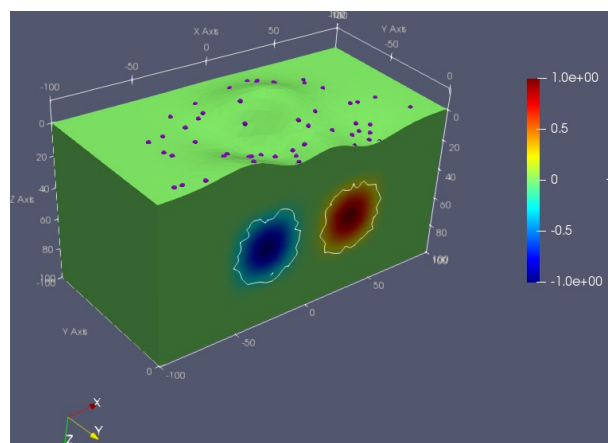
Алгоритм был реализован в виде программы на C++. Отметим, что ассемблирование матрицы  $\mathcal{A}$  выполняется по отдельным блокам стандартными процедурами, реализованными в конечно-элементных пакетах. Мы приводим результаты решения СЛАУ (9) при помощи прямых методов. Анализ различных методов решения, включая предобусловленные итерационные методы, будут приведены в отдельной статье.



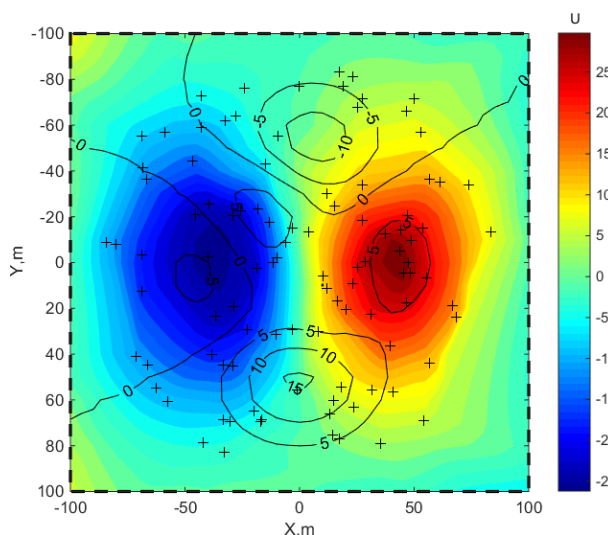
**Рисунок 1.** Расчётная область  $200 \times 200 \times 100$  м, использованная в численном эксперименте. Тетраэдральное разбиение состоит из 150 тысяч элементов. Зелеными кружками показаны положения 100 точек измерения потенциала.

### Численные эксперименты

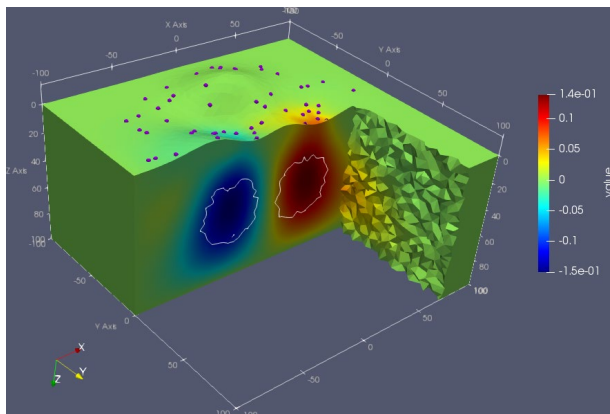
В численном эксперименте расчётная область представляла собой параллелепипед  $200 \times 200 \times 100$  м с некоторым заданным рельефом дневной поверхности (Рисунок 1). Область была разбита на 150 тыс. тетраэдров. На дневной поверхности было расположено 100 приёмных электродов. Правая часть  $f$  была задана в виде двух распределённых источников разного знака, расположенных на глубине 30 м под поверхностью (Рисунок 2).



**Рисунок 2.** Правая часть  $f$ . Белый контур обозначает линии уровня  $\pm 0,1$ .



**Рисунок 3.** Вычисленные значения потенциала  $u$  на дневной поверхности. Черными изолиниями показан рельеф поверхности. Крестики обозначают положения точек наблюдения. Значения потенциала в точках были использованы, как входные данные для решения обратной задачи.



**Рисунок 4.** Результат решения обратной задачи. Цветом показаны восстановленные значения правой части  $f$ . Белый контур обозначает истинное положение источников.

Для этой конфигурации была решена прямая задача (Рисунок 3). Значения потенциала  $u$  в электродах составляли вектор «измеренных» данных,  $d$ , которые подавались в качестве входных данных в обратную задачу.

Результаты решения обратной задачи (9) приведены на рисунке 4. Реконструированные значения  $f$  хорошо совпадают с истинными аномалиями, но образуют более размытые области с меньшей амплитудой. Отметим, что решение обратной задачи в виде (3) даёт идентичный результат. Разница между двумя подходами заключается в том, что предлагаемый в настоящей статье метод более экономичен на больших задачах.

## Выводы

В статье предложен новый подход для решения обратной задачи метода ЕП. Реконструируемое при этом распределение правой части идентично таковому в стандартном методе на основе минимизации функционала Тихонова. Отличие между двумя подходами заключается в способе получения решения. Вместо решения нормальной системы уравнений с плотной матрицей, в предлагаемом подходе решается система с разреженной матрицей большего размера. Для больших обратных задач этот подход может оказаться существенно менее ресурсоёмким по сравнению с минимизацией по Тихонову. В статье приведена постановка задачи и рассмотрена её конечно-элементная дискретизация. Полученные выражения верифицированы в численном эксперименте. Авторы статьи полагают, что предлагаемый подход может стать менее ресурсозатратной альтернативой стандартным методам инверсии площадных данных ЕП, которые возникают, например, при изучении подземных вод.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа поддержана грантом Российского Научного Фонда 21-11-00139. Авторы благодарят Сколковский институт науки и технологий за доступ к вычислительному кластеру Zhores (Zacharov et al. 2019).

## ЛИТЕРАТУРА

- Комаров ВА, 1994. Геоэлектрохимия, СПб.:Изд-во СПбГУ, 136 с.
- Семенов АС, 1980. Электроразведка методом естественного поля, Л.: Недра, 391 с.
- Bernabé Y, Mainault A 2015 Physics of porous media: Fluid flow through porous media. In Schubert G, (ed) Treatise on geophysics (2nd ed.), Oxford: Elsevier, pp.19–41.
- Bolève A, Revil A, Janod F, Mattiuzzo JL, Fry J.-J. 2009 Preferential fluid flow pathways in embankment dams imaged by self-potential tomography. *Near surface geophysics*, 7:447–462.
- Guarracino L, Jougnot D, 2018. A physically based analytical model to describe effective excess charge for streaming potential generation in water saturated porous media. *J. Geophys. Res.*, 123:52–65.
- Jardani A, Revil A, Bolève A, Dupont JP 2008. Three-dimensional inversion of self-potential data used to constrain the pattern of groundwater flow in geothermal fields. *J. Geophys. Res.*, 113: B09204.
- Malovichko M, Koshev N, Yavich N, Razorenova A, Fedorov M, 2021. Electroencephalographic source reconstruction by the finite-element approximation of the elliptic Cauchy problem, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 68(6), pp. 1811–1819.
- Minsley BJ, Sogade J, Morgan FD 2007 Three-dimensional source inversion of self-potential data. *Journal of Geophysical Research*, 112:B2202.
- Onsager L 1931, Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I., *Phys. Rev.*, 376 p.405-426, doi:10.1103/PhysRev.37.405
- Revil A, Jardani A, 2013 The self-potential method: theory and applications in environmental geosciences. Cambridge University Press.

Sato M, Mooney HM, The electrochemical mechanism of sulfide self-potentials, 1960. Geophysics, 25, p.226-249.

Zacharov I, Arslanov R, Gunin M, Stefonishin D, Bykov A, Pavlov S, Panarin O, Maliutin A, Rykovanov S, Fedorov M, 2019. Zhores—Petaflops supercomputer for data-driven modeling, machine learning and artificial intelligence installed in Skolkovo Institute of Science and Technology. Open Eng., (9):512–520.